数理解析研究所講究録
808巻 1992年 167-188

純代数的立場から見た fusion algebras

九大・理　坂内英一 (Eiichi Bannai)

§0. はじめに

Fusion algebra は conformal field theory に付随してあらわれる複素数体上の有限次の可換・結合的代数であるが、ここではそのような代数を純代数的立場から考察してみようと思う。すなわち、出発点にある物理 (conformal field theory) を全く考えないで、fusion algebra がみたすような代数的条件をみたす複素数体上の有限次の可換・結合的な代数を考えてみようというわけである。私自身物理に関しては全く無知であり、代数的なレベルでしか考えることが出来ないこともその一つの理由ですが、一方で fusion algebra が代数的には私の今まで研究して来た association schemes と非常に似ているということから、それとの関連を明らかにしたいと思ったことがこの考察を始めた動機です。またこのことは、九大での河野俊丈氏の主催するセミナーに出席して色々と触発されたことにも負っています。

この原稿の内容は次の通りです。§1.1 で fusion algebra の

性質をみたす純代数的な概念として、fusion algebra at algebraic level と（私が仮に）呼ぶものを定義します。これが fusion algebra の代数的な公理化として best のものであるか否かは議論の余地があるかもしれないと思います。§1.2 では（多分この記事の読者にはあまりなじみがないと思うので）association scheme についての簡単な解説をします。更に association scheme に付随した Bose-Mesner algebra (Hecke algebra) を純代数的レベルで考えた Bose-Mesner algebra at alg. level というものを考え、§1.3 でこれが先に定義した fusion algebra at alg. level と自然に 1:1 に対応することを示します。更に§1.4でこの対応を用いて、（物理における）fusion algebra に対して存在する行列 S が unitary 又は対称であるということが、代数的レベルでは association scheme（又は B-M alg. at alg. level）のどのような条件に対応するか、またそれと関連して Verlinde の公式と呼ばれる公式がどのように解釈されるかについて述べます。（物理における）fusion algebra では行列 S が unitary かつ対称であることは定理であり、Verlinde の公式も定理ですが、一般の fusion algebra at alg. level ではこのことは成りたたず、従って Verlinde などによるこれらの定理の証明は物理的要請に基づいた証明であり、代数的レベルでは証明出来ないことを明らかにします。§2 では、§1.3 で述べた fusion alg. at alg. level と B-M alg. at alg. level の 1:1 対

応を用いて、association schemes から出発して integral でかつ $S=$ unitary かつ $S'=$ 対称、となる fusion algebra を見つけようとする色々の試みについて述べます。更にその中で、modular invariance property : $\exists T =$ diagonal 行列. s.t. $(ST)^3 = S^2$, をみたすものを見つけようとする試み、更に(必ずしも integral でない) fusion algebra at alg. level の中に modular invariance property を持つものが存在することを(特に Hamming association schemes $H(d,q)$ に対して存在することを)述べます。

§1.1. Fusion algebras at algebraic level

Fusion algebra の性質を取り出した純代数的な概念を定義する。

定義. (Fusion algebras at algebraic level)

不定元 $x_0, x_1, \cdots, x_d$ を basis とし、乗法

$$x_i x_j = \sum_{k=0}^{d} N_{ij}^{k} x_k$$

により定義される可換・結合的な $\mathbb{C}$ 上の代数 $\mathfrak{A} = \langle x_0, x_1, \cdots, x_d \rangle$ で次の条件 (i)〜(iv) をみたすものを fusion algebra at alg. level とよぶ。

(i) $N_{ij}^{k} \in \mathbb{R}$, $N_{ij}^{k} \geq 0$,

(ii) $\exists$ bijection $\hat{\ }$: $\{0,1,\cdots,d\} \longrightarrow \{0,1,\cdots,d\}$ satisfying

(a) $\hat{\hat{i}} = i$

(b) $N_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{k}} = N_{ij}^{k}$

(c) if we define $N_{ijk} = N_{ij}^{\hat{k}}$, then N_{ijk} is symmetric in i, j, k (for $\forall i, j, k$).

(iii) $N_{0j}^{k} = \delta_{jk}$ (i.e., $x_0 =$ identity) for $\forall i, j$,

(iv) $\exists$ a linear rep. of $\mathfrak{A} = \langle x_0, x_1, \cdots, x_d \rangle$ with

$x_i \longmapsto \sqrt{k_i}$ with $k_i > 0$ for all i.

(注：物理における fusion algebra では (i)′ $N_{ij}^{k} \in \mathbb{N} = \{0, 1, \cdots\}$ が基本的である。(i) より強い (i)′ をみたすものを integral な fusion algebra at alg. level とよぶことにする。)

(注：物理における fusion algebra の代数的公理化として何が best であるかはまだ色々と議論があってしかるべきと思う。上の条件 (iv) は fusion algebra における $S_0^i > 0$ for $\forall i$ に対応する。(i) の $N_{ij}^{k} \geq 0$ の条件は代数の立場からはあまり本質的でないのかもしれない。出来れば物理の分かる方に、どのような条件を fusion algebra at alg. level の定義とすべきかについて御意見をいただきたいと思います。多分、後で述べることからもわかるように、他の条件をいくつか加える必要があるかもしれないと思います。)

例1. $G =$ any finite group.

$$\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_d = \text{all the irreducible characters of } G$$

$$\chi_i \otimes \chi_j = \sum_{k=0}^{d} N_{ij}^{k} \chi_k \qquad (N_{ij}^{k} \in \mathbb{N}) \quad \text{とする。}$$

この時、 $x_i x_j = \sum_{k=0}^{d} N_{ij}^{k} x_k$ とおくと $\mathfrak{A} = \langle x_0, x_1, \cdots, x_d \rangle$ は integral な fusion algebra at alg. level である。

(注: $\chi_{\hat{i}} = \overline{\chi_i}$ ここで $-$ は complex conjugate,

$$N_{ijk} = N_{ij}^{\hat{k}} = (\chi_i \otimes \chi_j, \chi_{\hat{k}})$$

$$= (\chi_i \otimes \chi_j \otimes \chi_k, \chi_0)$$ となり N_{ijk} は i, j, k に関して symmetric, $\sqrt{k_i} = \chi_i(1)$ となる。)

例2. 他の興味深い例としては Lusztig [7] (および [4] 参照) によるもので、任意の有限群 G に対して、G の共役類とその代表元の中心化群の既約指標の組を basis として (乗法をうまく定義して) integral な fusion algebra (at algebraic level) が出来る。(特別な群 G に対してのこの fusion algebra の Fourier 変換が 有限 Chevalley 群の既約指標の決定の最後の部分に本質的に使われている。)

§1.2. Association scheme と Bose-Mesner algebra, および Bose-Mesner algebra at algebraic level

Association scheme とは次のように定義される組合せ論的な対象である。 詳しくは文献 [2] を参照されたい。

定義 (Association scheme)

X = 有限集合. R_i $(i=0,1,\cdots,d)$ が X の上の関係 (i.e., $R_i \subset X\times X$) が次の条件 (i)〜(iv) をみたす時, X と R_i 達の組 $\mathfrak{X}=(X,\{R_i\}_{0\le i\le d})$ を association scheme とよぶ。

(i) $R_0=\{(x,x)\mid x\in X\}$,

(ii) $X\times X=R_0\cup R_1\cup\cdots\cup R_d$, $R_i\cap R_j=\phi$ if $i\neq j$,

(iii) $\forall i\in\{0,1,\cdots,d\}$ に対して ${}^tR_i=\{(y,x)\mid(x,y)\in R_i\}$ と定義すると ${}^tR_i=R_j$ for some $j\in\{0,1,\cdots,d\}$

(iv) $\forall i,j,k\in\{0,1,\cdots,d\}$ に対して

$$\#\{z\in X\mid (x,z)\in R_i,\ (z,y)\in R_j\}$$

は $(x,y)\in R_k$ のもとで x,y のとり方によらず i,j,k のみにより定まる一定の数 $(=p_{ij}^k)$ である。

定義 (隣接行列 と Bose-Mesner algebra)

関係 R_i に対する隣接行列を A_i とかく。すなわち A_i の行, 列は X の元で parametrize されており,

$$(A_i)_{x,y}=\begin{cases}1 & \text{if } (x,y)\in R_i\\ 0 & \text{if } (x,y)\notin R_i\end{cases}.$$

$A_0,A_1,\cdots,A_d$ で生成される ($|X|$ 次の $\mathbb{C}$ 上の完全行列環の中の) subalgebra $\mathfrak{A}=\langle A_0,A_1,\cdots,A_d\rangle$ を association scheme $\mathfrak{X}$ の Bose-Mesner algebra (又は Hecke algebra) とよぶ。

注：　Bose-Mesner algebra は半単純な algebra である。
$\mathfrak{A}$が可換な algebra となる association scheme $\mathfrak{X}$ を可換な association scheme とよぶ。（$\mathfrak{X}$＝可換 $\Longleftrightarrow$ $A_iA_j = A_jA_i$ for $\forall i, j$ $\Longleftrightarrow$ $p_{ij}^k = p_{ji}^k$ for $\forall i, j, k$ ）

<u>例3.</u> 群 G が有限集合 X の上に可移に働らいているとする。G の $X \times X$ の上への orbits を $\mathcal{O}_0 = \{(x, x) \mid x \in X\}, \mathcal{O}_1, \cdots, \mathcal{O}_d$ とするとき，　$(x, y) \in R_i \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (x, y) \in \mathcal{O}_i$ と定義すると $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0 \le i \le d})$ は association scheme を作る。更に $\mathfrak{X}$ が可換であるための必要十分条件は G の X の上への置換表現が <u>multiplicity-free</u>（すなわち同値でない既約表現の直和となる）となることであり，このような多くの multiplicity-free な置換表現の例が存在する。

<u>例4.</u>（Group association scheme）

G = any finite group

$C_0 = \{1\}, C_1, \cdots, C_d$ を G の共役類全体とし，

$X = G$,　$(x, y) \in R_i \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} yx^{-1} \in C_i$ と定義すると

$\mathfrak{X}(G) = (G, \{R_i\}_{0 \le i \le d})$ は <u>可換な</u> association scheme となる。

（$\mathfrak{X}(G)$ の Bose-Mesner algebra $\mathfrak{A} \cong Z(\mathbb{C}G)$）［この例は $G \times G$ が G に可移に作用している例の特別な場合ともみなせる。］

以下この原稿では association scheme という時は可換なもののみを考えることにする。Association scheme の Bose-Mesner algebra $\mathfrak{A}=\langle A_0, A_1, \cdots, A_d\rangle$ は可換な半単純な次数 $d+1$ の $\mathbb{C}$ 上の algebra であり、丁度 $d+1$ 個の原始巾等元 $E_0, E_1, \cdots, E_d$ が（集合として）一意的に定まる。この時、$\circ$ を Hadamard 積（行列の entry-wise の積）とすると、

$$(|X|E_i)\circ(|X|E_j)=\sum_{k=0}^{d} q_{ij}^{k}\,(|X|E_k)$$

となる $q_{ij}^{k}\in\mathbb{R}$ が存在し、$q_{ij}^{k}\geq 0$ となる（Krein condition）。また、$\mathfrak{A}$ の２つの bases $A_0, A_1, \cdots, A_d$ と $E_0, E_1, \cdots, E_d$ の変換行列 P を $\mathfrak{X}$ の指標表（1st eigenmatrix）とよぶ。すなわち、

$$(A_0, A_1, \cdots, A_d)=(E_0, E_1, \cdots, E_d)\cdot P$$

であり、更に

$$(|X|E_0, |X|E_1, \cdots |X|E_d)=(A_0, A_1, \cdots, A_d)\,Q$$

とあらわす。従って $PQ=QP=|X|I$.

さて、Bose-Mesner algebra は association scheme という組合せ論的実体の存在のもとに存在したが、それを純代数的性質を抽出して得られた概念を次に定義する。

定義（Bose-Mesner algebra at algebraic level）

不定元 $x_0, x_1, \cdots, x_d$ を basis とし、乗法

$$x_i x_j=\sum_{k=0}^{d} p_{ij}^{k}\; x_k$$

により定義される可換・結合的な$\mathbb{C}$上の代数 $\mathfrak{A}=\langle x_0, x_1, \cdots, x_d \rangle$ が次の条件 (i)〜(iv) をみたす時、$\mathfrak{A}$をBose-Mesner algebra at alg. level とよぶ。

(i) $p_{ij}^k \in \mathbb{R}$, $p_{ij}^k \geq 0$,

(ii) $\exists$ bijection $\wedge : \{0,1,\cdots,d\} \longrightarrow \{0,1,\cdots,d\}$ satisfying

(a) $\hat{\hat{i}} = i$

(b) $p_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{k}} = p_{ij}^k$

(iii) $p_{0j}^k = \delta_{jk}$ (i.e., $x_0 =$ identity)

(iv) $p_{ij}^k = \delta_{i\hat{j}}\, k_i$ with $k_i > 0$ (for $\forall i$) であり、

map $x_i \longmapsto k_i$ $(i=0,1,\cdots,d)$ は $\mathfrak{A}=\langle x_0, x_1, \cdots, x_d\rangle$ の一次の(i.e., linear な)表現を与える。

(注: この概念は本質的に Y. Kawada [5] (1942) ([2, §2.5] を参照) によって <u>character algebra</u> と呼ばれるものである。character algebra では $p_{ij}^k \in \mathbb{R}$ のみを仮定し、$p_{ij}^k \geq 0$ は仮定しない。従って、Bose-Mesner alg. at alg. level は character algebra with non-negative type とも言えるものである。)

さて、association scheme から2通りの方法で Bose-Mesner algebra at alg. level が得られることを述べる。

<u>例 5</u>　$\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ を association scheme (もちろんここでは常に可換であることを仮定している)、

$$A_i \cdot A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^{k} A_k$$

$$(|X| E_i) \circ (|X| E_j) = \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^{k} (|X| E_k) \qquad \text{とする。}$$

この時、

(a) $x_i x_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^{k} x_k$ は Bose-Mesner algebra (at algebraic level) である。

(b) $x_i \cdot x_j = \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^{k} x_k$ も Bose-Mesner algebra (at algebraic level) である。 ($m_i = \operatorname{rank} E_i$ が B-M alg. at alg. level の定義の k_i に対応する。)

§1.3. <u>Fusion alg. at alg. level と Bose-Mesner alg. at alg. level の間の対応</u>

先ず次の定理を述べる。

<u>定理 A.</u> <u>Fusion algebras at alg. level と Bose-Mesner algebras at alg. level の間に自然な 1:1 対応が存在する。</u>

(証明) $\mathfrak{A} = \langle x_0, x_1, \cdots, x_d \rangle$, $x_i x_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^{k} x_k$ を B-M alg. at alg. level とする。この時

$$N_{ij}^{k} = \sqrt{\frac{k_k}{k_i k_j}}\; p_{ij}^{k}$$

と定義し、(新らしい不定元 $x_0, x_1, \cdots, x_d$ に対して)

$x_i x_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^{k} x_k$ と定義したものは fusion algebra at alg. level になる。 逆に、$p_{ij}^{k} = \sqrt{\frac{k_i k_j}{k_k}} N_{ij}^{k}$ とおくことにより、fusion alg. at alg. level から B-M alg. at alg. level が出来る。

[もちろん、この対応により、integral という性質は保たれない。どの association scheme (又は B-M alg. at alg. level) から integral な fusion algebra が出来るかは、また どの fusion algebra (at alg. level) に対して対応する association scheme が存在するかは、興味ある問題であると思う。]

定理 A による対応の具体例の一つを次で見よう。

$\mathfrak{X}(G)$ を group association scheme とする。この B-M alg の E_i は χ_i (G の既約指標) と 1:1 に対応する。(更にこの時 $m_i = \chi_i(1)^2$ となる。) この時、$x_i x_j = \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^{k} x_k$ で定義される 例 5 (b) (§1.2) の B-M algs. at alg. level と 例 1 (§1.1) の (integral な) fusion algebras at alg. level とが 定理 A の 1:1 対応により対応している。

§1.4. 行列Sの対称性とVerlindeの公式

物理にあらわれる fusion algebra に対しては，次のことが成り立つことが良く知られている。

$N_i \overset{\text{def}}{=} (N_{ij}^k)_{\substack{0\le j\le d \\ 0\le k\le d}}$ とおく時．$\exists S=(S_i^j)$ satisfying

$$S^{-1}N_iS = \begin{pmatrix} \lambda_i^{(0)} & & & & 0 \\ & \lambda_i^{(1)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_i^{(d)} \end{pmatrix}$$

with $\lambda_i^{(j)} = \dfrac{S_i^j}{S_0^j}$ (for $\forall i$).

(注: このような行列Sは任意の fusion alg. at alg. level に対しても存在することが容易に示される。) また，次の式が成り立つことが Verlinde により示されている。

(Verlindeの公式)

$$N_{ij}^k = \sum_{n=0}^{d} \frac{S_i^n\, S_j^n\, \overline{S}_n^k}{S_0^n}. \qquad \text{——(I)}$$

一方，association scheme の B-M algebra に対しては次の式が成り立つことが良く知られている。([2, Chap 2] 参照).

$B_i \overset{\text{def}}{=} (p_{ij}^k)_{\substack{0\le j\le d \\ 0\le k\le d}}$ とおく時．$\exists P=(P_{ij})$ satisfying

$$P^{-1} B_i P = \begin{pmatrix} P_{0i} & & & 0 \\ & P_{1i} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P_{di} \end{pmatrix} \quad (\text{for } \forall i)$$

(注: このような P は任意の B-M alg. at alg. level に対しても存在することが容易に示される。この行列 P はこの原稿の§1.2で出てきた大の指標表と一致している。) またこの時

$$\boxed{p_{ij}^{k} = \frac{1}{|X| \cdot k_k} \cdot \sum_{\nu=0}^{d} P_{\nu i} P_{\nu j} \overline{P_{\nu k}}\, m_\nu} \text{ —— (II)}$$

が成り立つことが良く知られている。(c.f. [2], [5].) (注: (II) 式は B-M alg. at alg. level に対しても成り立っている。)

さて、定理Aの 1:1 対応により、fusion alg. at alg. level の行列 S と B-M alg. at alg. level の行列 P とは関連している筈である。事実、次が成り立つ。

<u>命題B.</u>

$$S = \frac{1}{\sqrt{|X|}} \begin{pmatrix} \sqrt{k_0} & & & 0 \\ & \sqrt{k_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt{k_d} \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{k_0}} & & & 0 \\ & \frac{1}{\sqrt{k_1}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\sqrt{k_d}} \end{pmatrix}$$

(ここで $|X| \overset{\text{def}}{=} k_0 + k_1 + \cdots + k_d$).

定理Aの1:1対応から(II)に自然に対応する式が存在する筈で、それが(I)になるであろうと考えるのは自然であり、私も始めはそうであろうと考えていた。しかし、実際は、定理A(および命題B)の対応を用いて(II)から得られる式は、

$$\boxed{N_{ij}^{k} = \sum_{n=0}^{d} \frac{S_i^n\, S_j^n\, \overline{S}_k^n}{S_0^n}\cdot\frac{m_n}{k_n}} \qquad \text{(I)}'$$

であり、(I)とは異なる。

更に次が成り立つ。

<u>定理C.</u> (1) $S = \text{unitary} \iff k_i = m_i \quad (\text{for } \forall i)$

(2) $S = {}^tS \iff P = \overline{Q}$

(注: 上の左辺の行列 S は fusion alg. at alg. level のそれであり、k_i, m_i, P, Q 等は定理Aにより対応するB-M alg. at alg. level の対応するものである。$P=\overline{Q}$ をみたす association scheme (又はB-M alg. at alg. level) を<u>self-dual</u>であるという。これは $p_{ij}^{k} = q_{ij}^{k}$ をみちびき、例5(§1.2)で作った2通りのB-M algebras at alg. level が一致することをいみする。(ただし一般に $p_{ij}^{k} = q_{ij}^{k}$ が $P=\overline{Q}$ をみたすか否かは未解決である。))

このことから、fusion alg. at alg. level の行列 S が何時 unitary または対称であるかな（対称 ⇒ unitary は成り立つ）、association scheme（B-M. alg）の良く知られた概念で特徴づけられたわけである。一方、Verlinde は物理における fusion algebra では (I) が成り立ち従って S は常に unitary かつ対称になることを証明している。良く知られているように、self-dual でない association schemes はいくらでも存在する。このことは fusion alg at alg. level では S = unitary かつ対称および Verlinde の公式 (I) は一般に成立せず、従って Verlinde の公式 (I) の証明は物理的条件を用いた証明であることを示している。
[$S={}^tS$ ならば 公式 (I) = 公式 (I)′ は成り立つ。この逆も成り立っていると思う。]

§2.1. Fusion algebras の新しい例を見い出そうとする試み

さて、我々は、定理 A の 1:1 対応を用いて、association schemes から出発して、B-M alg, B-M. algebra at alg. level を経由して、新しい integral な fusion algebra at alg. level を作れないかということを考えた。事実色々な例が作れる。その中でも特に性質:

(1) S = unitary and ${}^tS = S$ (${}^tS = S \Rightarrow S$ = unitary は成立つ)
をみたすものが特に見つけ出したいものである。(物理的には ${}^tS = S$ が要請されていると思われるので。) また良い(物理における) fusion algebra が持つ性質:

(2) (<u>modular invariance property</u>):

$\exists T$ = 対角行列 s.t. $(ST)^3 = T^2$ (かつ $S^4 = I$)

をみたすものが見つかれば更に望ましいと考える。

初めに、有限群 G に対する group association scheme $\mathfrak{X}(G)$ (例4, §1.2) からそのようなものが見つからないかを考えた。G = abel群の時はそのようなものが存在する (conformal field theory がその上に存在する) ことが知られているので、以下 G は非abelであることを仮定する。いくつかの実験から、群 G の位数が小さい時 S = unitary とならない (すなわち、定理C, (1) から $\chi_i(1)^2 = m_i$ と $|C_i| = k_i$ が集合として一致するものが存在しない) ことが群論的に容易にわかり、一番小さい可能性でも $|G| = 64$ になった。位数64の群は Hall-Senior の1964年の表で完全に決定されており、全部で 257 (abelのものも含めて) あることが知られている。更に表から、$k_i = m_i$ ($\forall i$) をみたすものは #144 − #153 と書かれている10個であることがわかった。ここで ${}^tS = S$

か否かを調べるには，Gの指標表を計算し，更に共役類，既約指標をどのような順序に並べるかを考えなければならないが，このことを手で計算することは可能であろうがかなりやっかいで時間がかかると思われた。そのこともあって，この計算を Cayley を使える当時大阪教育大（現九大）の宗政昭弘氏に頼んだ。事実，#144－#153 のいずれも integral なかつ ${}^tS=S$ となる fusion alg. at alg. level を与えることが宗政氏により Cayley を用いて示された。例えば #153 は $Sz(8)$ のシロー 2-群であり，この integral fusion alg. at alg. level の行列 S は次で与えられる。

$$
S=\begin{array}{c}8\\ \\ 14\end{array}
\left(\begin{array}{c|c}
\overbrace{\text{全部 } 1}^{8} &
\overbrace{\begin{matrix}
2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2\\
2&2&2&2&2&2&-2&-2&-2&-2&-2&-2&-2&-2\\
2&2&-2&-2&-2&-2&2&2&2&2&-2&-2&-2&-2\\
2&2&-2&-2&-2&-2&-2&-2&-2&-2&2&2&2&2\\
-2&-2&2&2&-2&-2&2&2&-2&-2&2&2&-2&-2\\
-2&-2&2&2&-2&-2&-2&-2&2&2&-2&-2&2&2\\
-2&-2&-2&-2&2&2&2&2&-2&-2&-2&-2&2&2\\
-2&-2&-2&-2&2&2&-2&-2&2&2&2&2&-2&-2
\end{matrix}}^{14} \\ \hline
\begin{matrix}2\\2\\2\\2\\2\\2\\2\\2\\2\\2\\2\\2\\2\\2\end{matrix}\quad \begin{matrix}\text{対称行列である}\\ \text{ことから決まる}\end{matrix} &
\begin{matrix}
\boxed{\begin{matrix}4i&-4i\\-4i&4i\end{matrix}} & & & & & & \\
& \boxed{\begin{matrix}4i&-4i\\-4i&4i\end{matrix}} & & & & 0 & \\
& & \boxed{\begin{matrix}4i&-4i\\-4i&4i\end{matrix}} & & & & \\
& & & \boxed{\begin{matrix}4i&-4i\\-4i&4i\end{matrix}} & & & \\
& & & & \boxed{\begin{matrix}4i&-4i\\-4i&4i\end{matrix}} & & \\
& 0 & & & & \boxed{\begin{matrix}4i&-4i\\-4i&4i\end{matrix}} & \\
& & & & & & \boxed{\begin{matrix}4i&-4i\\-4i&4i\end{matrix}}
\end{matrix}
\end{array}\right)\cdot\frac{1}{8}
$$

$i=\sqrt{-1}$

さて、これらの10個のfusion algebras at alg. levelの上にconformal field theoryが乗っているか否かはまだ未確定であるが、その際に入れが成り立っていることが望ましいと思われるmodular invariance propertyはその10個のいずれに対しても成立し得ないことが坂内悦子により計算で示された。($^tS=S$かつmodular invarianceをともにみたすintegral fusion algebras at alg. levelはそれ程容易には見つからないようである。) この問題に関しては、宗政氏により、$^tS=S$をみたすintegral fusion algebras at alg. levelをもつassociation schemesはいくつか見つかっている。その大部分はmodular invariance propertyをみたさないが、$(\mathbb{Z}_2)^6$ (更に大きいelementary abelian 2-group)のSchur ringとして出来るのでmodular invariance propertyをみたすものも存在する。(ただしそれらの例では $(ST)^3=S^2=T^2=I$。) いずれにせよ、association schemesから出発して物理が上に乗っているようなfusion algebras (at alg. level)を見つけようとすることはもっと追求に値すると思う。実際候補となるassociation schemesは色々沢山あるので、物理が上に乗っている(可能性がある)条件を代数的な条件で(あるいは組合せ論的な条件で)表わせるようなことがあれば、この追求はもっと効果的であろう。これに関して、専門家の方の御教示をお願いしたい。

§2.2 Hamming association schemes $H(d,q)$ から出来る fusion algebras at algebraic level の modular invariance

最後に、integral な条件を除いた fusion alg. at alg. level を考えると、${}^tS=S$ かつ modular invariance を持つものは色々存在する。Self-dual な assoc. scheme で一番典型的なものは Hamming association scheme $H(d,q)$ であるが、これから出来る（integral ではない）fusion alg. at alg. level はこの性質をみたすことを次に示す。

<u>定義</u>（Hamming scheme $H(d,q)$）

$F=$ 有限集合，$|F|=q\geq 2$

$$X=\underbrace{F\times F\times\cdots\times F}_{d},\quad d\geq 2$$

$x=(x_1,\cdots,x_d),\ y=(y_1,\cdots,y_d)\in X$ に対して

$$(x,y)\in R_i \Longleftrightarrow \#\{j \mid x_j\neq y_j\}=i$$

と定義したもの $\mathfrak{X}=(X,\{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ は（可換な）assoc. scheme を作る．これを Hamming assoc. scheme $H(d,q)$ とよぶ。

この時次のことが成り立つ。

$H(d,q)$ の指標表は

$$P=P_{ij}=(K_j(i))$$

ここで $K_j(\theta)$ は Krawtchouk poly と呼ばれる直交多項式で

$$K_j(\theta)=\sum_{u=0}^{i}(-q)^u(q-1)^{j-u}\binom{d-u}{j-u}\binom{\theta}{u}.$$

定理 D. (Bannai-Bannai [1])

行列 P を $H(d,q)$ の指標表とする。行列 T を

$$T = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \alpha^1 & & & 0 \\ & & \alpha^2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha^d \end{pmatrix}$$

ここで α と α_0 は

$$\alpha^2+(q-2)\alpha+1=0 \quad , \quad \alpha_0^3 = \frac{q^{\frac{d}{2}}}{(1+(q-1)\alpha)^d}$$

で決まる数（従って 6 通りの T が存在する）とすると、

$$(PT)^3 = q^{\frac{3d}{2}} I$$

をみたす。

系([1]) $H(d,q)$ から出来る（必ずしも integral でない）fusion alg. at alg. level は modular invariance property を持つ。（すなわち、S を fusion alg. at alg. level の行列 S とすると上の（6 通りの）T に対して $(ST)^3=S^2=I$ が成り立つ。）

この行列 S の例は次の通り。

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad S = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 & -1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$H(2,2)$ の時． $H(3,2)$ の時．

同様の結果は一般の self-dual な P-and Q-polynomial (symmetric) assoc. schemes でも成り立つのではないかと期待しているが、今の所極く特別な場合にしか証明出来ていない。

参考文献

1. E. Bannai and E. Bannai : Modular invariance of the character table of Hamming association scheme $H(d,q)$, (preprint)
2. E. Bannai and T. Ito : Algebraic Combinatorics I, Benjamin/Cummings, 1984.
3. R. Dijkgraaf and E. Verlinde : Modular invarance and the fusion algebra, Nucl. Phys. B. (Proc. suppl.) 5 (1988), 87-97.
4. R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde and H. Verlinde : The operator algebra of orbifold models, Comm. Math. Phys. 123 (1989), 485-526.
5. Y. Kawada : Über den dualitätssatz der Charaktere nichtcommutativer Gruppen, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan (3) 24 (1942), 97-109.
6. T. Kohno : Fusion algebras and mapping class groups,

数理研講究録 768 代数的組合せ論. pp 60-66, 1991.

7. G. Lusztig: Leading coefficients of character values of Hecke algebras, Proc. Symp. Pure Math. 47 (1987), 253-262.

8. C. Moore and N. Seiberg: Classical and quantum conformal field theory, Comm. Math. Phys. 123 (1989), 177-254.

9. E. Verlinde: Fusion rules and modular transformations in 2 dimensional conformal field theories, Nucl. Phys. B. (FS 22), 300 (1988), 360-376.

(以上)